Capítulo 8

Bem-estar social e desigualdade do rendimento

Vamos continuar a dedicar atenção à análise da distribuição do rendimento, desta vez centrada na medição da desigualdade dessa distribuição. Teremos, para o efeito, de deixar de assimilar o conceito de desigualdade ao conceito de *concentração* do rendimento, como fizémos no capítulo anterior, para passarmos a uma conceptualização mais claramente normativa e centrada no conceito de *bem-estar*, como já se começou a fazer no final do capítulo anterior. Com este posicionamento teórico seremos conduzidos a soluções, relativamente à medição do fenómeno, que não podem ser entendidas de um ponto de vista meramente técnico e assente em instumentos estatísticos normativamente neutros. Qualquer medição da desigualdade deve, então, permitir conhecer os juizos de valor implícitos nessa medição e, idealmente, permitir contemplar diferentes juizos de valor que nela possam estar presentes por diferentes investigadores sociais. É nesse sentido que iremos caminhar ao longo deste capítulo.

8.1. Introdução explícita de juízos de valor na medição da desigualdade

Vimos, no capítulo anterior, que a unidade de observação mais adequada para analisar a distribuição do rendimento é a família, no seu sentido económico (ou *agregado doméstico privado*, ADP, correspondente ao conceito anglo-saxónico de *household*). Mas por simplificação (para que não seja necessário incorporar, na explicação que segue, a dimensão familiar, necessário quando queremos relacionar rendimento com bem-estar, o que iria dificultar essa explicação) e também para se poder generalizar a outras análises de desigualdade, em que o *pooling* familiar do rendimento não se verifica (por exemplo, em análise de desigualdades salariais, de pensões, etc), vamos referir-nos, ao longo do capítulo, a rendimento atribuível a *individuos*. Entenda-se, então, este conceito como *genérico*, podendo abarcar diferentes significados ou ser generalizável a outras situações.

Consideremos então que numa economia existe uma dada população com *n* indivíduos que auferem, no seu conjunto num determinado período, um rendimento total X_0. Para este rendimento total X_0, pode representar-se a distribuição do rendimento entre os indivíduos dessa população, em termos de notação vectorial, do seguinte modo:

$$(X_0 : x_{01}, \cdots, x_{0i}, \cdots, x_{0n}) \quad (8.1)$$

em que x_{0i} representa o rendimento auferido pelo indivíduo *i*, tendo-se portanto, $\sum_{i=1}^{n} x_{0i} = X_0$.

Imaginemos agora que alguém pretende avaliar a desigualdade da distribuição deste rendimento. Já dissemos várias vezes que *desigualdade* é um conceito normativo e que qualquer avaliação da desigualdade do rendimento numa economia comporta a existência de juizos de valor presentes nessa avaliação. Vamos, neste capítulo, explicitar um conjunto de juizos de valor que permita essa avaliação, e deduzir uma forma correspondente de medir essa desigualdade.

Antes de proceder a esta explicitação, comecemos por introduzir, ainda que de forma pouco precisa nesta fase da exposição (e a aprofundar seguidamente), a noção de *bem-estar social* que irá ser usada neste capítulo. Este conceito, como vimos no capítulo 3, está associado a uma certa avaliação normativa do "estado de uma sociedade" num certo período, ou seja, das características da sociedade relativamente a um conjunto amplo de aspectos, quer de natureza política (liberdade de expressão e participação nas decisões colectivas), de segurança, as condições climáticas, a situação ambiental, as características económicas (forma de utilização dos recursos, por exemplo), a distribuição do rendimento entre os membros desta sociedade, etc. Uma ideia/hipótese fundamental que vamos admitir é que é possível, ao comparar diferentes estados desta sociedade, proceder a uma ordenação social, isto é, perante estados alternativos, dizer-se que a sociedade se encontra melhor, pior ou em situação igual. Ao fazer-se isto, está a proceder-se a uma avaliação do bem-estar da sociedade e a ordenar estados sociais em termos de bem-estar.

Trata-se naturalmente de algo complexo, dado o vasto conjunto de aspectos que se pode admitir como passíveis de serem considerados nessa avaliação. Mas vamos admitir que é possível proceder a uma avaliação do *bem-estar* de uma sociedade apenas em função da *distribuição do rendimento* entre os seus membros.

Vamos então admitir que existe um avaliador *j* do bem-estar desta sociedade. Para este avaliador existe uma *função de bem-estar social* que pode ser expressa como:

(8.2) $$W^{(j)} = W^{(j)}\left(X : x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n\right)$$

que associa, a um vector de rendimentos, um número real positivo, que indica o bem-estar da sociedade no seu conjunto, tal como é avaliado por *j* e, portanto, a uma dada distribuição inicial do rendimento total X_0 , corresponde, para este avaliador *j*, um dado nível de bem-estar social $W_0^{(j)}$, isto é:

(8.3) $$\left(X_0 : x_{01}, \cdots, x_{0i}, \cdots, x_{0n}\right) \rightarrow W_0^{(j)}$$

Estamos assim a isolar um aspecto particular desta sociedade (a distribuição do rendimento), que nos interessa neste momento, ignorando temporariamente os restantes aspectos que caracterizam o estado da sociedade num dado período.

Vamos então admitir as seguintes *hipóteses*, que são cruciais para os raciocínios que a partir de agora vão ser efectuados: (i) existe um avaliador do bem-estar de uma sociedade; (ii) apenas a distribuição do rendimento é tomada em consideração na avaliação do bem-estar social; (iii) a uma dada distribuição do rendimento é possível, a quem está a proceder a essa avaliação, associar um dado nível de *bem-estar social* W ; (iv) é possível proceder a uma ordenação do bem-estar social associado a diferentes distribuições do rendimento; (v) a um mesmo rendimento total podem corresponder diferentes níveis de bem-estar social, associados a formas distintas da sua distribuição; (vi) quem avalia consegue determinar o bem-estar social máximo alcançável por uma sociedade que tenha um certo nível de rendimento total e que é possível, para esse bem-estar social máximo, determinar a distribuição deste rendimento total que lhe corresponde; (vii) um nível mais elevado de rendimento total permite alcançar um nível de bem-estar social superior ao nível máximo alcançável com um rendimento total inferior.

Consideremos então o avaliador *j* e a distribuição do rendimento inicial:

(8.4) $\left(X_0 : x_{01}, \cdots, x_{0i}, \cdots, x_{0n}\right)$

Se, para o rendimento total X_0, a distribuição do rendimento observada corresponder ao valor máximo do bem-estar que, para o avaliador *j*, é alcançável para essa sociedade com esse rendimento total, então podemos dizer que estamos perante uma *distribuição óptima* desse rendimento total para esse avaliador *j*. Isto significa que não é possível, com este rendimento total, efectuar qualquer alteração na sua distribuição entre os indivíduos que aumente o bem-estar social, de acordo com a função de bem-estar social do avaliador *j*. Podemos então dizer que, para quem está a avaliar a desigualdade da distribuição do rendimento, esta distribuição óptima é, para este rendimento total, e para este avaliador *j*, uma *distribuição equitativa*.

Mas convém referir que não estamos a dizer que seja necessariamente uma distribuição em que todos os indivíduos aufiram o mesmo rendimento, nem que seja necessariamente uma distribuição óptima (ou equitativa) para outro avaliador $k \neq j$.

Se, para o rendimento total X_0, a distribuição do rendimento observada não corresponder ao valor máximo de bem-estar que, segundo o avaliador *j*, é alcançável por esta sociedade com este rendimento total, isso significa então que é possível alterar esta distribuição por forma a alcançar um nível de bem-estar social superior. Isto é, é possível efectuar transferências de rendimento entre os indivíduos por forma a aumentar o bem-estar social segundo a avaliação feita por *j*. E podemos mesmo imaginar que é possível efectuar transferências de rendimento tais que o bem-estar social associado à distribuição do rendimento que resulte destas tranferências seja o máximo alcançável com esse rendimento total, ou seja, se obtenha uma distribuição óptima (ou equitativa) do rendimento para o avaliador *j*. Podemos então dizer que, na óptica de quem está a avaliar o bem-estar social, para aquele rendimento total, a distribuição inicial do rendimento revela a existência de *desigualdade*: há desigualdade do rendimento para o avaliador *j*.

8.2. Desigualdade do rendimento e bem-estar social

Repare-se que o que dissemos só é possível porque admitimos as hipóteses indicadas acima. Mas, por outro lado, ainda não está claro de que modo quem está a avaliar a distribuição do rendimento associa a essa distribuição do rendimento um certo nível de bem-estar social. Teremos de esclarecer mais adiante este ponto, que é obviamente crucial nesta avaliação.

Vamos dar mais um passo importante no nosso raciocínio, observando que este passo é possível com base nas hipóteses acima referidas. Para quem está a avaliar o bem-estar social (o avaliador *j*), é possível encontrar um *rendimento total mínimo* $X_m^{(j)}$ (em que o índice superior significa que é o rendimento mínimo para o avaliador *j*) que, repartido de tal forma que maximize o bem-estar social que é possível alcançar com este rendimento total mínimo, origine, de acordo com o avaliador *j*, um nível de bem-estar social igual ao da distribuição inicial do rendimento, isto é, $W_0^{(j)}$. Vejamos com mais atenção esta situação, que é *fundamental* para a explicação que se segue.

Consideremos um nível de rendimento total $X_m^{(j)}$ repartido entre os membros da sociedade de tal modo que a este rendimento total assim repartido esteja associado, segundo o avaliador *j*, o nível mais elevado de bem-estar social que é possível alcançar com este rendimento total. Vamos considerar que esse nível de bem-estar seja $W_0^{(j)}$, isto é, o nível de bem estar que o avaliador *j* associa à distribuição inicial do rendimento. Consideremos de novo a representação vectorial desta distribuição do rendimento (considerada por *j* como a óptima, no sentido dado acima), que surge representada como:

(8.5) $$\left(X_m^{(j)}; x_{m1}^{(j)}, \cdots, x_{mi}^{(j)}, \cdots, x_{mn}^{(j)}\right)$$

em que $x_{mi}^{(j)}$ representa, segundo o avaliador *j*, a parte do rendimento total mínimo $X_m^{(j)}$ auferido pelo indivíduo *i*, tendo-se, portanto, $\sum_{i=1}^{n} x_{mi}^{(j)} = X_m^{(j)}$.

É possível provar que $X_m^{(j)} \leq X_0$. Vamos ver como. De facto, se o bem-estar social alcançado, segundo o avaliador *j*, com a distribuição inicial do rendimento, for o máximo alcançável para aquele rendimento total X_0, então $X_m^{(j)} = X_0$, pois qualquer rendimento total superior a X_0 poderia ser repartido de forma a alcançar um nível de bem-estar social superior a $W_0^{(j)}$; mas nós afirmámos que este nível de bem-estar social já era o máximo para aquele rendimento total, segundo o avaliador *j*. Se o bem-estar social alcançado, segundo o avaliador *j*, com a distribuição inicial do rendimento, $W_0^{(j)}$, não for o máximo alcançável para aquele rendimento total X_0, então $X_m^{(j)} < X_0$ pois, como admitimos, se a distribuição do rendimento apresentada acima é a óptima para este rendimento $X_m^{(j)}$ (e à qual corresponde $W_0^{(j)}$, como dissémos), qualquer rendimento superior a $X_m^{(j)}$ poderá originar um nível de bem-estar superior a $W_0^{(j)}$ para o avaliador *j* que temos vindo a considerar.

Repare-se que este raciocínio se apoia nas hipóteses acima formuladas, nomeadamente na que refere que um nível mais elevado de rendimento total permite alcançar um nível de bem-estar social superior ao nível máximo alcançável com um rendimento total inferior. $X_m^{(j)}$ é o rendimento total mínimo que origina esse nível de bem-estar social $W_0^{(j)}$ para o avaliador *j*.

Sintetisemos o que concluimos até aqui. A distribuição inicial do rendimento tem associado, segundo o avaliador *j*, um nível de bem-estar social $W_0^{(j)}$:

(8.6) $$\left(X_0 : x_{01}, \cdots, x_{0i}, \cdots, x_{0n}\right) \to W_0^{(j)}$$

em que $\sum_{i=1}^{n} x_{0i} = X_0$.

Existe, para o avaliador *j*, um rendimento total mínimo que, repartido entre os *n* indivíduos da sociedade de forma óptima (isto é, que maximiza o bem-estar social para este rendimento total mínimo) origina um nível de bem-estar social igual àquele que o avaliador *j* associa à distribuição inicial do rendimento, isto é:

(8.7) $$\left(X_m^{(j)}; x_{m1}^{(j)}, \cdots, x_{mi}^{(j)}, \cdots, x_{mn}^{(j)}\right) \to W_0^{(j)}$$

em que $\sum_{i=1}^{n} x_{mi}^{(j)} = X_m^{(j)}$,

e tem-se $X_m^{(j)} \leq X_0$. Estamos então em condições de poder *medir a desigualdade* da distribuição do rendimento inicial, como:

(8.8) $$\frac{X_0 - X_m^{(j)}}{X_0} = 1 - \frac{X_m^{(j)}}{X_0}$$

Mas vejamos com atenção porque é que esta expressão é um *índice de desigualdade*.

Em primeiro lugar verifiquemos que se trata de um número puro. De facto, é fácil verificar que quer X_0 quer $X_m^{(j)}$ estão expressos na mesmas unidades, e surgem no numerador e no denominador da expressão indicada. Trata-se, pois, de um número índice, não expresso em qualquer unidade.

Pela apresentação feita acima pode concluir-se que pode interpretar-se a expressão dada em (8.8) como a proporção do rendimento inicial que, para o avaliador *j*, não é necessária (ou que é *excedentária*) para obter o nível de bem-estar da distribuição do rendimento inicial.

Explicando melhor. Com um rendimento total $X_m^{(j)} < X_0$ consegue-se uma distribuição óptima (no sentido que já dissemos acima, e que significa uma distribuição equitativa para o rendimento total $X_m^{(j)}$) que origina o mesmo nível de bem-estar social que a distribuição inicial. A proporção do rendimento inicial que, de acordo com o avaliador *j*, pode ser "retirada" por forma a garantir o mesmo nível de bem-estar inicial, mas com uma distribuição óptima (isto é, equitativa), dá-nos uma forma de medir a desigualdade para o avaliador *j*.

Retomando o que também já foi dito, se $X_m^{(j)} = X_0$, isso significa que a distribuição inicial do rendimento é equitativa para o avaliador *j*; mas isso reflecte-se num índice de desigualdade igual a zero, ou seja, não há desigualdade para o avaliador *j*. O índice de desigualdade acima apresentado tem assim 0 como valor mínimo. Repare-se que, de facto, o valor do índice de desigualdade se encontra situado no intervalo [0, 1].

8.3. Aversão à desigualdade: diferentes formas de avaliar a desigualdade

Entramos num ponto crucial da nossa explicação. O valor de $X_m^{(j)}$ depende da forma como quem avalia o bem-estar de uma sociedade associa a uma dada distribuição do rendimento um valor para o bem-estar social. Ainda nada foi dito sobre a forma de o fazer, e é isso que faremos de seguida. Apenas podemos dizer (o que parece claro, pela forma como foi apresentada), que esta associação tem que ver com juizos de valor de quem avalia o bem-estar social.

Podemos já, no entanto, e antecipando um resultado que veremos mais adiante, afirmar que quanto menor for, para uma dada distribuição inicial do rendimento, o valor do rendimento mínimo $X_m^{(j)}$, tanto maior é a desigualdade dessa distribuição do rendimento para essa pessoa *j* que está a avaliar. Mas isso significa que, para esse avaliador, tanto menor é o rendimento total que, optimamente distribuido, origina o mesmo nível de bem-estar inicial.

Vamos supor que dois avaliadores distintos (pessoas *j* e *k*) estão a fazer uma avaliação da desigualdade da mesma distribuição do rendimento e que, para a pessoa *j* o valor do rendimento mínimo é $X_m^{(j)}$ e que para a pessoa *k* o valor do rendimento mínimo é $X_m^{(k)}$, e que temos $X_m^{(j)} < X_m^{(k)}$. Por definição sabemos que a $X_m^{(j)}$ e a $X_m^{(k)}$, correspondem distribuições óptimas do mesmo rendimento total X_0 (para *j* e para *k*, respectivamente). Que podemos dizer acerca das diferenças de juizos de valor entre as pessoas *j* e *k* nesta avaliação?

Se $X_m^{(j)} < X_m^{(k)}$, isso significa, observando a expressão apresentada para o índice de desigualdade, que para a pessoa *j*, há mais "desperdício" de rendimento necessário para obter a distribuição óptima do que para a pessoa *k*. Mas isso significa que a pessoa *j* é mais "exigente" do que a pessoa *k* na avaliação da desigualdade da distribuição inicial do rendimento. Veremos mais adiante, quando dispusermos de mais elementos teóricos, que a pessoa *j* tem uma maior *aversão à desigualdade* do que a pessoa *k*.

O que vamos descrever a partir de agora é uma forma possível de introduzir explicitamente juizos de valor nesta avaliação, e derivar uma forma específica para este índice que permita medir a desigualdade de uma distribuição do rendimento.

8.4. Utilidade e bem-estar individuais

Recordemos o conceito de utilidade, que foi apresentado no capítulo 3. Genericamente, este conceito é utilizado para exprimir o grau de satisfação que uma pessoa obtém do uso de um bem de consumo. Mas agora vamos introduzir o conceito de *utilidade do rendimento*.

Podemos imaginar que o facto de uma pessoa auferir, num certo período, um certo rendimento confere, a essa pessoa, um certo grau de satisfação nesse mesmo período. Podemos imaginar várias razões para que tal aconteça. Por um lado, o rendimento auferido possibilita a sua utilização na aquisição de bens e serviços e, por isso, um certo grau de satisfação resultante do seu uso. Mas o rendimento auferido possibilita também a sua utilização sob a forma de poupança e isso significa uma maior segurança económica a quem o aufere: a possibilidade de acorrer a uma necessidade não prevista ou de efectuar mais despesas na aquisição de bens e serviços no futuro. Além disso, o rendimento auferido confere, a quem o obtém, estatuto social.

Podemos então afirmar que o rendimento auferido por uma pessoa num certo período confere a essa pessoa um certo grau de satisfação nesse período, que vamos designar por *utilidade do rendimento* nesse período. É assim uma utilidade indirecta: não é o rendimento que determina por si mesmo (directamente) utilidade, mas indirectamente (através dos aspectos acima referidos).

As razões acima referidas para introduzir este conceito põem em evidência uma dificuldade de medida para a utilidade do rendimento, atendendo às componentes que considerámos para identificar a satisfação obtida por um dado rendimento auferido. O rendimento auferido num período é expresso em termos de unidades monetárias. Como exprimir a utilidade de um certo rendimento? Obviamente é difícil encontrar uma unidade adequada para medir algo que se refere a um "sentimento" individual de satisfação. Mesmo que essa unidade possa existir, ainda assim permanece o problema da natureza subjectiva da medida.

Mas vejamos mais atentamente a questão. Não pretendemos, de facto, fazer comparações cardinais, mas antes *ordinais*, da utilidade do rendimento. Ou seja, pretendemos encontrar uma forma de exprimir a utilidade que possibilite, para um indivíduo que aufira rendimentos, ordenar utilidades associadas a diferentes níveis de rendimento. Assim sendo, poderemos "criar" uma unidade, de natureza abstracta, que possibilite esse objectivo. Designemos por *"util"* a unidade em que exprimimos a utilidade. Podemos então dizer que, enquanto a variável rendimento se encontra expressa em unidades monetárias, a utilidade do rendimento será expressa em *utis*.

Consideremos um dado indivíduo *i* que aufere, num certo período, o rendimento x_i (expresso em u.m./u.t.) e que atribui a esse rendimento uma certa utilidade $U^{(i)}(x_i)$ referente a esse período. Mas a utilidade do rendimento é um sentimento subjectivo para o indivíduo *i* que aufere esse rendimento, pelo que deve ser expresso em *"utis de i por unidade de tempo (u.t.)"*

Resolvido desta forma o problema, podemos introduzir um novo conceito: o de *função de utilidade individual* para o indivíduo *i*, como a função que associa, a cada rendimento auferido pelo indivíduo *i* (expresso em u.m./u.t.), um certo nível de utilidade (expresso em utis de *i*/u.t.), e podemos exprimir desta forma esta relação funcional:

(8.9) $$U^{(i)}(x_i)$$

Repare-se que estamos a admitir que cada indivíduo tem uma função de utilidade própria e, portanto, teremos tantas funções de utilidade quantas os indivíduos (ou seja, cada indivíduo associa, à sua maneira, o rendimento que aufere com a utilidade que dele obtém), e que essa utilidade depende apenas do seu rendimento.

Isto é, considerando os *n* indivíduos existentes nesta economia, temos *n* funções utilidade $U^{(i)}(x_i)$, para *i* = 1, ..., *n*.

Temos então, para dois indivíduos *i* e *j*:

indivíduo *i*: $x_i \rightarrow U^{(i)}\left(x_i\right)$

indivíduo *j*: $x_j \rightarrow U^{(j)}\left(x_j\right)$

em que, enquanto x_i e x_j estão expressas em u.m./u.t., $U^{(i)}(x_i)$ está expressa em utis de *i*/u.t. e $U^{(j)}(x_j)$ em utis de *j*/u.t. Daqui pode já concluir-se que, para dois indivíduos distintos, *i* e *j*, não podemos comparar as utilidades $U^{(i)}(x_i)$ e $U^{(j)}(x_j)$.

Vejamos com mais cuidado o alcance do que dissemos, e as hipóteses que lhe estão subjacentes. Ao afirmarmos que cada indivíduo tem a sua própria função de utilidade queremos dizer que cada indivíduo tem a sua própria percepção do grau de satisfação obtido pelo rendimento que aufere, e consegue traduzir essa satisfação na unidade convencionada. Por outro lado, ao afirmarmos que a utilidade depende apenas do rendimento significa que não estamos a considerar, como determinante da utilidade individual, a forma como esse rendimento é obtido, designadamente o maior ou menor grau de esforço requerido para a sua obtenção. Além dissso estamos a ignorar a influência de outras variáveis económicas, como a riqueza. Ora, poderiamos admitir, o que não estamos a fazer, que o mesmo indivíduo pode ter níveis de utilidade diferentes para o mesmo rendimento se detiver valores diferentes da sua riqueza.

Ao afirmarmos que a utilidade de um indivíduo depende apenas do seu próprio rendimento estamos a admitir a hipótese *individualista* de que o rendimento das outros indivíduos não influencia a sua utilidade. Estamos assim a excluir, na formulação escolhida, as hipóteses de sentimentos altruistas, ou seja, uma situação em que, para o mesmo nível de rendimento do indivíduo, esta tenha uma utilidade maior se outros indivíduos tiverem um rendimento maior, ou tenha uma utilidade menor se outros indivíduos tiverem um rendimento menor. Estamos também a excluír sentimentos de inveja, ou seja, uma situação em que, para o mesmo nível de rendimento do indivíduo, esta tenha uma utilidade maior se outros indivíduos tiverem um rendimento menor, ou tenha uma utilidade menor se outros indivíduos tiverem um rendimento maior.

Podemos assim interpretar a função de utilidade acima indicada do seguinte modo. Numa formulação mais geral, poderiamos admitir que a utilidade individual do rendimento depende do rendimento individual (x_i), do rendimento auferido pelos outros indivíduos (x_j para $j \neq i$), do esforço requerido para obter esse rendimento (E_i), da riqueza individual (R_i) e de outros factores:

$$(8.10) \qquad U^{(i)}\left(x_i, x_{i\neq j}, E_i, R_i, \cdots\right), \qquad j = 1, \cdots, N$$

e a formulação anteriormente apresentada, $U^{(i)}(x_i)$, significa que a utilidade do indivíduo *i* só varia com o rendimento do próprio indivíduo *i*.

A apreciação da utilidade é, como dissemos, naturalmente subjectiva e cada indivíduo terá portanto a "sua" função de utilidade, pelas razões já apontadas. Mas podemos postular certas propriedade comuns às funções de utilidade com alguma credibilidade e validade geral: i) a utilidade aumenta com o rendimento, isto é, um valor maior do rendimento confere, ao indivíduo que o aufere, um grau de satisfação mais elevado; diz-se que a função de utilidade é *crescente*, isto é, tem-se $\frac{dU^{(i)}(x_i)}{dx_i} > 0$; ii) à medida que o rendimento aumenta, iguais aumentos do rendimento originam aumentos decrescentes da utilidade; diz-se que a função de utilidaade é *côncava*, isto é, tem-se $\frac{d^2U^{(i)}(x_i)}{dx_i^2} < 0$. Podemos admitir que um mesmo aumento do rendimento (em valor absoluto) confira, a quem o recebe, um aumento da utilidade superior se o seu rendimento, antes do aumento, for mais baixo do que se for mais elevado. Ou seja, podemos admitir que, se o indivíduo *i* aufere um rendimento de 100 u.m./u.t., um aumento da utilidade (expresso em número de utis de i/u.t.) resultante de um aumento do rendimento de 10 u.m./u.t. é superior ao aumento de utilidade resultante de um aumento do rendimento de 10 u.m./u.t. no caso de esse indivíduo ter um rendimento de 1000 u.m./u.t.

Vamos introduzir então o conceito de *utilidade marginal do rendimento* para o indivíduo *i*: a relação entre a variação da utilidade total (medida em utis de *i*/u.t.) e a variação do rendimento (medida em u.m./u.t.) quando a variação do rendimento é muito pequena (infinitésimal). Pode então dizer-se de outro modo o que foi dito acima: afirmar que a função de utilidade é côncava é o mesmo que afirmar que *a utilidade marginal do rendimento é decrescente com o rendimento*.

Representemos agora gráficamente a função $U^{(i)}(x_i)$, isto é, a função de utilidade do rendimento para o indivíduo *i*. As propriedades acima indicadas permitem a sua representação genérica como está na Figura 8.1.

8.5. Função de bem-estar social

Precisamos de dar um passo adicional para atingir o nosso objectivo. Recorde-se que necessitamos de uma forma de explicitar de que modo uma pessoa, que está a avaliar o bem-estar de uma sociedade, associa a uma dada distribuição do rendimento um certo nível de bem-estar social.

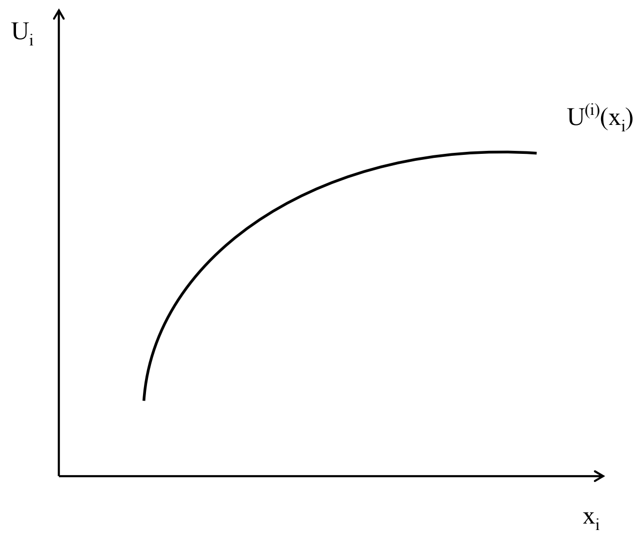

Figura 8.1

Para tal vamos introduzir a seguinte *hipótese fundamental*: o bem-estar social, ou seja, o bem-estar da sociedade no seu conjunto, depende (de alguma forma a explicitar) exclusivamente do bem-estar das vários indivíduos na sociedade.

Ao referirmos atrás o conceito de utilidade aproximámo-nos bastante de um conceito de bem-estar individual. Mas, tal como os conceitos foram apresentados e os raciocínios efectuados, referimo-nos a utilidade como uma aproximação do bem-estar tal como ele é sentido por cada indivíduo na sociedade. Mas se uma pessoa pretende avaliar o bem-estar social, tendo como base a hipótese fundamental acima referida, temos de explicitar o bem-estar individual, não como ele é percebido por cada indivíduo na sociedade, mas tal como é percebido por quem avalia o bem-estar social.

Vamos então introduzir o conceito de *função de bem-estar individual* como a função que associa, a cada rendimento x_i, um nível de bem-estar individual W_i tal como ele é *avaliado pela pessoa que está a avaliar o bem-estar na sociedade*. Continua, claramente, a ser algo subjectivo, mas para quem avalia (e que o faz para todas os indivíduos da sociedade) e não para cada um dos indivíduos nesta sociedade. Isto é, o avaliador *j* atribui ao indivíduo *i* um determinado nível de bem-estar associado ao rendimento x_i auferido por esse indivíduo, em que x_i continua a ser expresso em u.m./u.t., mas $W^{(j)}(x_i)$ está expresso em *utis conjecturais* de *j*/u.t. Repare-se que não se trata agora de utis de *i* (percepção subjectiva da utilidade por parte de *i*) mas utis que o avaliador *j* atribui ao indivíduo *i* (daí a designação de "*utis conjecturais*") associado ao rendimento x_i que o indivíduo *i* aufere (e daí também o índice superior "(j)" e a alteração da letra U para a letra W para o representar).

Introduzimos assim a *função de bem-estar do avaliador j relativa ao indivíduo i* como:

(8.11) $$W_i^{(j)}(y_i)$$

que significa o nível de utilidade, ou de bem-estar (expresso em utis conjecturais de *j*/u.t.) que a pessoa *j* que está a avaliar o bem-estar social atribui ao indivíduo *i* em função do rendimento que este indivíduo *i* aufere, expresso em u.m./u.t. (e não, como na função $U^{(i)}(y_i)$, a utilidade, sentida pelo próprio indivíduo *i*).

Esta mudança na óptica de avaliação (não por parte de cada indivíduo mas pela pessoa que avalia o bem-estar de todos) tem implicações importantes no significado da função de bem-estar individual acima indicada. Em primeiro lugar, estamos a admitir nesta fase que existem diferentes funções de bem-estar individuais por parte de um dado avaliador *j* para cada um dos indivíduos. Mas isso significa que quem avalia pode associar diferentes valores do bem-estar ao mesmo rendimento auferido por diferentes indivíduos: não se trata de diferentes percepções subjectivas individuais do bem-estar, mas de diferentes avaliações subjectivas (para a pessoa que está a avaliar) desse mesmo bem-estar. Portanto, para o mesmo avaliador *j*, existem tantas funções de bem-estar individual quantos os indivíduos existentes na sociedade.

O problema atrás referido da impossibilidade de comparar utilidades de rendimento entre indivíduos (uma vez que se tratava de percepções subjectivas individuais de cada um desses indivíduos) não existe agora, uma vez que essa avaliação relativamente a cada um dos indivíduos, é agora feita pela mesma pessoa (o avaliador *j*). Mas surge um problema novo: se podemos imaginar (ainda que com as dificuldades apontadas) que cada indivíduo consegue avaliar o seu próprio bem-estar, como é possível a alguém, que não o próprio indivíduo, avaliar o bem-estar dos outros? Este é um ponto crucial que deve ser esclarecido. E a questão pode ser colocada ainda nestes termos: quem está em condições de poder avaliar o bem-estar dos indivíduos? Podemos sempre imaginar a situação de alguém que, colocando-se fora (ou "acima") da sociedade, possa proceder a essa avaliação. Mas, nesta fase, não é necessário ir tão longe: qualquer indivíduo na sociedade está em condições de o fazer mas, naturalmente, diferentes indivíduos valorizarão diferentemente esse bem-estar. Isso significa que, dados dois avaliadores, *j* e *k*, não poderemos comparar a avaliação do bem-estar do indivíduo *i* feita por estes dois avaliadores. Ou, dito de outro modo, não podem comparar-se, para um dado rendimento x_i (relativo ao indivíduo *i*), $W_i^{(j)}(x_i)$, expressa em utilidades conjecturais de *j*/u.t., com $W_i^{(k)}(x_i)$, expressa em utilidades conjecturais de *k*/u.t.

Consideremos então a função de bem-estar individual para o avaliador *j* relativo ao indivíduo *i*:

(8.12) $$W_i^{(j)}(x_i)$$

e vamos postular algumas propriedades para esta função.

Mas vamos introduzir uma propriedade, suportada numa hipótese que vamos formular: a *hipótese da anonimidade*. Expliquemos o que significa, o alcance interpretativo desta hipótese e as implicações que ela tem na formulação da função de bem-estar individual.

Por anonimidade entende-se a hipótese de, ao associarmos um nível de bem-estar a um rendimento, o fazermos sem termos em conta "quem" é que aufere esse rendimento. Isto é, estamos a atender ao nível do rendimento, independente do seu titular específico. Isto significa que, na função de bem-estar individual acima descrita, que a um dado valor de rendimento o avaliador *j* associa o mesmo bem-estar a todas os indivíduos que tenham esse mesmo rendimento. Esta hipótese tem algumas implicações importantes. i) em termos da função de bem-estar individual, podemos deixar de a formular como $W_i^{(j)}(x_i)$ para a formularmos como:

$$W^{(j)}(x) \tag{8.13}$$

eliminando o índice inferior *i*, isto é, para o avaliador *j*, todos os indivíduos têm a mesma função individual de bem-estar. Repare-se que qualquer sentimento de "simpatia" por algum indivíduo em especial fica erradicado da avaliação do bem-estar, e que com ele se exclui também a consideração de outros factores, que não o rendimento (o esforço na sua obtenção, ou apreciação ética sobre a forma, legal ou ilegal, como foi obtido, por exemplo) que, na formulação anterior, admitimos poder estar reflectida na forma específica da função individual do bem-estar.

Vamos também considerer que a função $W^{(j)}(x)$ é *crescente* e *côncava*, como já tinhamos visto anteriormente em relação à função de utilidade. É plausível admitir que o avaliador *j* tenha um comportamento de avaliação do bem-estar dos indivíduos em função do rendimento em que o bem-estar que associe ao rendimento aumente com o rendimento (função crescente) e que iguais aumentos de rendimento originem aumentos cada vez menores de bem-estar à medida que o rendimento aumenta (isto é, bem-estar marginal decrescente, função de bem-estar individual côncava).

Podemos agora chegar à função de *bem-estar social* para o avaliador *j* admitindo que, para esse avaliador, o bem-estar social depende *aditivamente* do bem-estar individual que o avaliador atribui a cada um dos indivíduos nesta sociedade.

Vamos então introduzir o conceito de *função de bem-estar social para o avaliador j*, como a função:

$$\begin{aligned} & W^{(j)}\left[W^{(j)}\left(x_1\right),...,W^{(j)}\left(x_i\right),\cdots,W^{(j)}\left(x_n\right)\right]= \\ & =W^{(j)}\left(x_1\right)+\cdots+W^{(j)}\left(x_i\right)+\cdots+W^{(j)}\left(x_n\right)= \\ & =\sum_{i=1}^{N}W^{(j)}\left(x_i\right) \end{aligned} \tag{8.14}$$

que podemos designar por *função de bem-estar social anónima e aditiva* (para o avaliador *j*), o que significa que qualquer aumento, de um certo valor, do bem-estar que o avaliador atribua a um indivíduo, seja ela qual for, mantendo-se inalterado o bem-estar das outras, aumenta em igual valor o bem-estar social.

Consegue ver-se já uma forma de relacionar a distribuição do rendimento com o bem-estar social: essa relação opera-se, não directamente, mas indirectamente através de uma dada forma de agregar bem-estar individuais que, por sua vez, dependem dos rendimentos individuais. Pode assim analisar-se o bem-estar social associado a uma dada distribuição do rendimento tendo apenas em conta a distribuição do rendimento e sem ter em conta os titulares específicos desses rendimentos.

8.6. A distribuição do rendimento que maximiza o bem-estar social

Foram já dados passos importantes para chegar ao nosso objectivo: avaliar a desigualdade de uma distribuição do rendimento, encontrando uma forma de a medir. Mas para continuarmos, precisamos de poder responder a duas questões fundamentais: (i) para um dado rendimento total, qual é a *distribuição óptima do rendimento*, isto é, aquela que maximiza o bem-estar social? (ii) se tivermos um dado rendimento total inicial, repartido de uma determinada forma, e conhecendo a forma óptima de repartir esse rendimento, qual é o valor do *rendimento total mínimo* que, repartido dessa forma óptima, origina o mesmo nível de bem-estar social que o rendimento total inicial, repartido da forma inicial? Repare-se que acabámos de formular as mesmas questões que formulámos anteriormente. Mas agora estamos mais preparados para responder a estas questões, pois formulámos um conjunto de hipóteses que nos vão permitir avançar. Deve ter-se em atenção que, daqui em diante, os resultados que obtivermos estão dependentes das hipóteses que formulámos anteriormente. Se tivessemos formulado outras hipóteses, certamente poderiamos chegar a resultados diferentes.

Vamos responder à questão (i) e, para facilitarmos o raciocínio, vamos imaginar uma sociedade composta por apenas dois indivíduos, $n = 2$. Pode provar-se que o resultado que vamos obter pode ser generalizado para qualquer número de indivíduos. Consideremos dois indivíduos, com rendimentos x_{01} e x_{02} respectivamente, sendo o rendimento total $X_0 = x_{01} + x_{02}$. Temos então uma distribuição inicial do rendimento que pode ser representada, em termos de notação vectorial, como:

(8.15) $\left(X_0; x_{01}, x_{02}\right)$

e é esta a distribuição inicial que vamos analisar.

Representemos agora num gráfico (Figura 8.2) a função de bem-estar individual para um dado avaliador *j*. Pelo que foi dito atrás sobre a hipótese da anonimidade, será *a mesma* função de bem-estar para os dois indivíduos. Consideremos, por hipótese, que $x_{01} < x_{02}$. A partir da função de bem-estar individual podemos determinar os níveis de bem-estar individual associados a esses rendimentos, como $W_1^{(j)} = W^{(j)}\left(x_{01}\right)$ e $W_2^{(j)} = W^{(j)}\left(x_{02}\right)$, em que, pela propriedade crescente da função de bem-estar individual, se tem $W^{(j)}\left(x_{01}\right) < W^{(j)}\left(x_{02}\right)$.

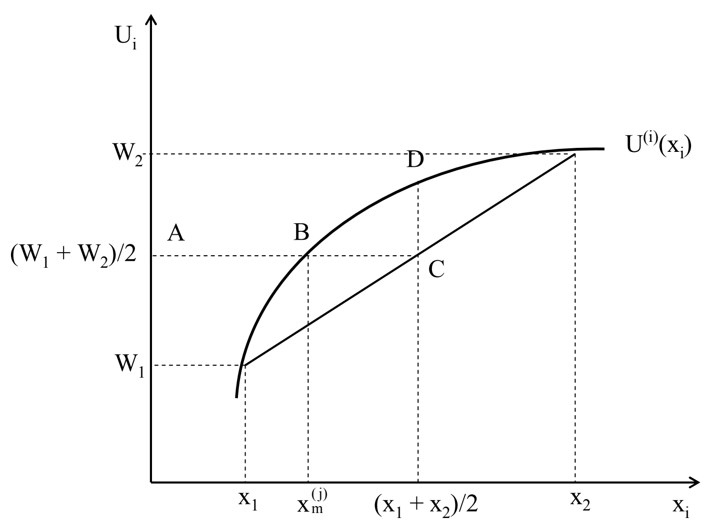

Figura 8.2

Estamos em condições de determinar o nível de bem-estar social associado a esta distribuição do rendimento total X_0 pelo avaliador *j* como:

(8.16) $W^{(j)}\left[Y_0; W^{(j)}\left(x_{01}\right), W^{(j)}\left(x_2\right)\right] = W^{(j)}\left(x_{01}\right) + W^{(j)}\left(x_{02}\right)$

Vamos ver que este não é o nível máximo de bem-estar que, para este avaliador *j,* esta sociedade pode alcançar com este rendimento total X_0. Para provar isso, é suficiente mostrar que outra forma de repartir o rendimento total X_0 origina um nível de bem-estar social superior.

Consideremos uma transferência de rendimento que ocorra do indivíduo de mais elevado rendimento para o indivíduo de mais baixo rendimento, mas por forma a que a ordenação dos indivíduos pelo seu rendimento não se altere (ou seja, o indivíduo 1 permaneça com menos rendimento do que o indivíduo 2). Ou seja, façamos aumentar o rendimento do indivíduo 1 de Δx_1 e diminuir o rendimento do indivíduo 2 de Δx_2 em que, portanto, $\Delta x_1 > 0$, $\Delta x_2 < 0$, $\Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$, e em que $\Delta x_1 = \frac{x_{02} - x_{01}}{2}$ para garantir que a ordenação inicial dos rendimentos seja preservada. Obtemos assim uma nova distribuição do mesmo rendimento total:

(8.16) $$\left(X_0; x'_{01}, x'_{02}\right)$$

Esta redistribuição do rendimento vai originar um aumento do bem-estar do indivíduo 1, $\Delta W_1^{(j)}$, e uma diminuição do bem-estar do indivíduo 2, $\Delta W_2^{(j)}$. Mas, atendendo à concavidade da função de bem-estar individual, o aumento do bem-estar do indivíduo 1 tem um valor absoluto superior ao valor absoluto da diminuição do bem-estar do indivíduo 2 e, portanto, o bem-estar social aumentou, isto é, $\Delta W_1^{(j)} + \Delta W_1^{(j)} > 0$.

Está então provado que, para o avaliador *j*, o bem-estar social associado à distribuição inicial do rendimento não é o máximo alcançável com o rendimento total X_0 e, portanto, a distribuição inicial do rendimento não é a distribuição óptima para o avaliador *j*. Obtivemos assim uma nova distribuição do mesmo rendimento total com um nível de bem-estar associado superior:

(8.17) $$W^{(j)}\left[X_{0;} W^{(j)}\left(x'_{01}\right), W^{(j)}\left(x'_{02}\right)\right] > W^{(j)}\left[X_{0;} W^{(j)}\left(x_{01}\right), W^{(j)}\left(x_{02}\right)\right]$$

Se efecturamos nova redistribuição do rendimento do indivíduo 2 para o indivíduo 1, num valor inferior a $\frac{x'_{02} - x'_{01}}{2}$, obteremos uma nova distribuição do mesmo rendimento total X_0 preservando a ordem dos rendimentos e, repetindo o raciocínio efectuado, pode concluir-se que o bem-estar social (obtido por adição dos bem-estar individuais) aumenta. Pode concluir-se facilmente que o bem-estar social, para o avaliador *j*, deixa de aumentar (ou seja, atinge o valor máximo) quando deixar de ser possível efectuar qualquer transferência de rendimentos entre os dois indivíduos que não altere a sua ordem. Mas tal acontece quando os rendimentos dos dois indivíduos se igualarem.

É importante notar que este resultado, embora obtido a partir de um raciocínio baseado na avaliação feita pelo avaliador *j*, é válido em geral para qualquer avaliador para quem a função de bem-estar social tenha as propriedades apresentadas anteriormente. Isto é, dado um certo rendimento total X e um dado avaliador com as propriedade enunciadas, a distribuição do rendimento é óptima quando todos os indivíduos tiverem *o mesmo rendimento*.

Repare-se, como nota complementar, que a condição de preservação da ordem dos rendimentos que impusemos para analisar o efeito de uma progressiva aproximação dos dois rendimentos foi necessária para a demonstração. Para uma transferência de rendimentos que preserve esta ordem torna-se fácil retirar conclusões sobre a alteração do bem-estar social que resulte dessa transferência (foi o que fizemos). Se tal ordenação se alterasse, o aumento de bem-estar só se verificaria no caso de, após essa transferência, os dois rendimentos se passarem a encontrar mais próximos entre si.

Vamos então reter a *conclusão fundamental* obtida: com base nas *hipóteses formuladas*, para um certo rendimento total, a distribuição óptima desse rendimento (isto é, aquela que maximiza o bem-estar social associado a esse rendimento total) é aquela em que todas os indivíduos têm o *mesmo rendimento*. E isto é válido para qualquer avaliador (que tenha uma função de bem-estar individual com as propriedades indicadas). Esta conclusão vai ser muito importante para os raciocínios que faremos seguidamente.

Passemos então agora a analisar a questão ii) que formulámos atrás. Ou seja, vamos ver qual o nível de *rendimento total mínimo* que, distribuído de forma óptima, origina o nível de bem-estar da distribuição inicial.

O nível de bem-estar associado à distribuição inicial do rendimento é, como vimos, para o avaliador *j*, $W_1^{(j)} + W_2^{(j)}$, o que significa que, considerando a existência de apenas dois indivíduos nesta sociedade, o nível de bem-estar por indivíduo é: $\frac{W_1^{(j)} + W_2^{(j)}}{2}$. Como concluimos atrás, para o rendimento X_0, o bem-estar máximo é alcançado quando o rendimento estiver repartido igualmente pelos dois indivíduos (i.e., ambos terem o mesmo rendimento). Temos de determinar o valor do rendimento que, sendo igual para os dois indivíduos, origine para cada um deles este nível de bem-estar.

Observando de novo a Figura 8.2, verifica-se que existe um ponto na curva de bem-estar individual (o ponto B), correspondente a este nível de bem-estar, ao qual corresponde, para o avaliador *j*, o nível de rendimento individual mínimo $x_m^{(j)}$. Repare-se que escrevemos o índice superior *(j)* para significar que este nível de rendimento foi determinado pelo avaliador *j* (para outro avaliador poderiamos ter outro valor).

Se ambos os indivíduos tiverem rendimento $x_m^{(j)}$, podemos então concluir que a este nível de rendimento por indivíduo corresponde o rendimento total mínimo de $X_m^{(j)} = 2.x_m^{(j)}$, e temos assim uma nova distribuição do rendimento que podemos representar, usando a notação que temos vindo a usar:

(8.18 $$\left(X_m^{(j)}; x_{m1}^{(j)}, x_{m2}^{(j)}\right)$$

em que $x_{m1}^{(j)} = x_{m2}^{(j)}$, ou seja, cada uma dos indivíduos recebem rendimentos iguais, de valor igual à média do rendimento total mínimo. A esta distribuição corresponde o máximo de bem-estar alcançável com o rendimento total mínimo $X_m^{(j)}$ (rendimentos dos dois indivíduos iguais). Podemos então concluir que $X_m^{(j)}$ é, para o avaliador *j*, o rendimento mínimo que, maximizando o bem-estar social que lhe está associado, origina o mesmo nível de bem-estar social que a distribuição inicial do rendimento total X_0. Pode ver-se claramente isto observando a Figura 8.2.

Verifica-se que qualquer rendimento por indivíduo, igualmente distribuído pelos indivíduos, de valor superior a $x_m^{(j)}$ origina um nível de bem-estar por indivíduo superior a ($W_1^{(j)} + W_2^{(j)}$)/2; quando o rendimento por indivíduo for $\bar{x}$, e for igual para os indivíduos, origina um nível de bem-estar por indivíduo (que é o máximo, porque o rendimento é igual para os dois indivíduos) correspondente ao ponto D da curva de bem-estar individual. Ou seja, qualquer nível de rendimento total superior a X_0 distribuído igualmente pelos dois indivíduos, origina um nível de bem-estar máximo que, por indivíduo, se situa no arco BD da curva de bem-estar individual. O ponto D é aquele a que corresponde o nível de bem-estar máximo por indivíduo para o rendimento total X_0.

Podemos então designar $X_m^{(j)}$ como o *rendimento* (mínimo) *equivalente igualmente distribuído* ("*equally distributed equivalent income*") para o avaliador *j*, por significar o nível de rendimento total que, sendo igualmente distribuído, origina o mesmo nível de bem-estar social para o avaliador *j* que o rendimento total inicial, distribuído da forma inicial.

Recorde-se agora o que dissemos, no início deste capítulo, sobre a forma de medir a desigualdade do rendimento (recomenda-se que se leia de novo o que atràs foi dito). Podemos então exprimir o índice de Atkinson (1970) que propôs este índice de desigualdade, calculado como:

$$A^j = \frac{X_0 - X_m^{(j)}}{X_0} = 1 - \frac{X_m^{(j)}}{X_0} = 1 - \frac{n.x_m^{(j)}}{n.\bar{x}} \qquad (8.19)$$

em que $A^{(j)}$ é o índice de Atkinson que corresponde à forma como o avaliador *j* avalia a desigualdade.

Antes de avançarmos, convém que exploremos um pouco mais a interpretação deste índice com base na representação gráfica apresentada. Para o efeito observe-se a Figura 8.3. Esta figura 8.3 da anterior por se admitirem três formas distintas para a curva de bem-estar individual: a anterior, respeitante ao avaliador *j,* $W^{(j)}$, uma outra apresentando uma maior concavidade respeitante ao avaliador *k*, $W^{(k)}$ e outra, respeitante a outro avaliador ℓ, representando uma curva de bem-estar individual linear $W^{(l)}$, esta última como caso limite (recorde-se que, em rigor, esta última situação viola a condição imposta de concavidade da função de bem-estar individual).

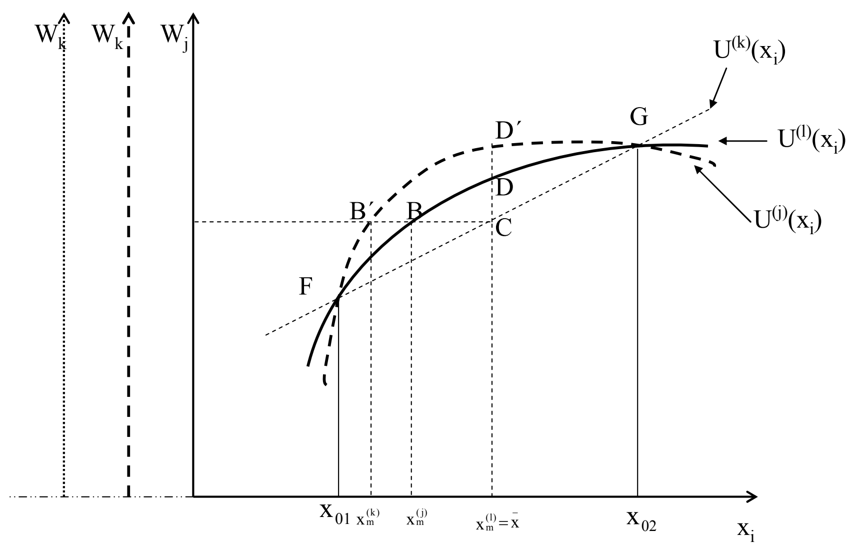

Figura 8.3

Recorde-se que, tratando-se de avaliadores distintos, estas três curvas não podem ser representadas no mesmo gráfico, pois $W^{(j)}$ está expressa em utis conjecturais de *j*/u.t., $W^{(k)}$ está expressa em utis conjecturais de *k*/u.t., e $W^{(\ell)}$ está expressa em utis conjecturais de ℓ/u.t., portanto unidades diferentes. Por isso procedeu-se a uma representação sobreposta dos três gráficos, mas em que cada uma das curvas deve ser lida com cuidado: no eixo das abcissas estão representados rendimentos nas mesmas unidades para as três curvas, mas em ordenadas devem ser lidas no eixo correspondente e procedeu-se a uma adequada transformação das funções que garanta que as três curvas se intersectem nos dois pontos F e G.

Trata-se de formas diferentes de avaliar a desigualdade do rendimento, e uma análise gráfica permite retirar algumas conclusões importantes. Compare-se o avaliador *j* com o avaliador *k*. Graficamente pode verificar-se que para a mesma distribuição inicial do rendimento, a uma maior concavidade da função de bem-estar individual do avaliador *k* corresponde um valor menor do rendimento mínimo por indivíduo que origina o mesmo nível de bem-estar social que a distribuição inicial, e portanto uma maior desigualdade do rendimento (compare-se BC com B'C e verifique-se que $x_m^{(k)} < x_m^{(j)}$.

Para a mesma distribuição inicial do rendimento, a uma função de bem-estar individual linear corresponde um valor dedesigualdade nula (para o avaliador ℓ temos $x_m^{(\ell)} = \bar{x}$).

A primeira das situações é um pouco mais difícil de interpretar economicamente (e será visto mais adiante) do que a segunda. Fixemos, por agora, a nossa atenção na segunda situação.

Se a função de bem-estar individual for linear, isso significa que o *bem-estar individual marginal* é constante, e isto significa que, para um dado rendimento total, ao ocorrer uma transferência de rendimento entre dois indivíduos, para este avaliador o aumento do bem-estar do indivíduo que vê o seu rendimento aumentado é igual, em valor absoluto, à diminuição do bem-estar do indivíduo que vê o seu rendimento diminuído, pelo que o bem-estar social não varia. Isto significa que, para este avaliador ℓ, não existe nenhum rendimento total inferior que origine um bem-estar social idêntico ao do rendimento inicial: qualquer rendimento total inferior origina um nível de bem-estar inferior. Mas isso significa que nenhuma distribuição do rendimento revela desigualdade. Repare-se que estamos a analisar esta situação como caso limite (de facto viola a hipótese de concavidade imposta à função de bem-estar individual). Mas podemos já avançar um pouco mais, dizendo que neste caso não existe aversão à desigualdade. E ainda um pouco mais, adiantando-nos ao que será dito mais adiante: uma maior concavidade da função de bem-estar individual está associada a uma maior *aversão à desigualdade*.

8.7. A forma da função de bem-estar individual

Neste momento, após uma leitura atenta do que está escrito até agora, compreende-se o fundamental do índice de Atkinson. Porém, não dispomos ainda de uma fórmula de cálculo da desigualdade de uma distribuição do rendimento que possa ser utilizada quando dispomos de informação numérica. Para tal, necessitamos de apresentar a forma da função de bem-estar individual, que respeite as propriedades apresentadas.

Uma forma funcional possível para a função de bem-estar individual é a seguinte, para o avaliador *j*:

$$(8.20)\quad W^{(j)}(x) = \begin{cases} a + \dfrac{b}{1-\varepsilon_j} \cdot x^{(1-\varepsilon_j)} & \Leftarrow b > 0 \wedge \varepsilon_j \neq 1 \wedge \varepsilon_j > 0 \\ a + b \cdot \ln(x) & \Leftarrow b > 0 \wedge \varepsilon_j = 1 \end{cases}$$

A partir desta forma para a função de bem-estar individual obtém-se a primeira derivada desta função em ordem a x (função de bem-estar marginal para o avaliador *j*) como:

$$(8.21)\qquad \frac{dW^{(j)}(x)}{dx} = b \cdot x^{-\varepsilon_j} \text{para } \ b{>}0 \wedge \varepsilon_j > 0$$

e a segunda derivada em ordem a *y* como:

$$(8.22)\qquad \frac{d^2W^{(j)}(x)}{dx^2} = -\varepsilon_j \cdot b \cdot x^{-\varepsilon_j - 1}, \text{ para } \ b > 0 \ \wedge \ \varepsilon_j > 0$$

e pode facilmente verificar-se que, com as restrições apresentadas para os parâmetros, temos, para qualquer valor de *y* positivo:

$$(8.23)\qquad \frac{dW^{(j)}(x)}{dx} = W'^{(j)}(x) > 0 \qquad \frac{d^2W^{(j)}(x)}{dx^2} = W''^{(j)}(x) < 0$$

isto é, a função de bem-estar individual $W^{(j)}(x)$ é crescente e côncava, as propriedades que impusemos inicialmente, a que demos adequada interpretação económica.

Façamos agora uma interpretação da função de bem-estar individual apresentada, e para isso observemos a Figura 8.4 onde se encontram representadas, para diferentes valores de ε_j , as correspondentes curvas de bem-estar marginal individual do avaliador *j*.

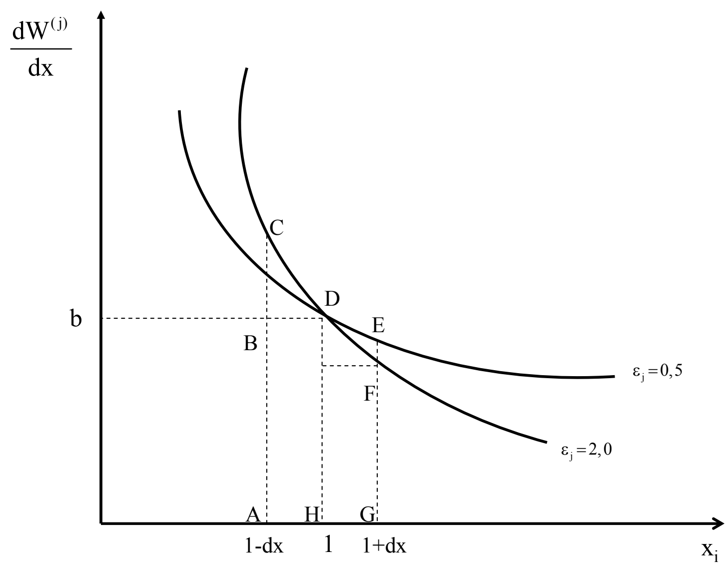

Figura 8.4

Mas, para compreendermos melhor o assunto, façamos a "leitura" da Figura 8.4, onde se encontram representadas duas curvas de bem-estar marginal para o avaliador *j*, mas correspon-dente a dois valores distintos de ε_j ($\varepsilon_j = 2$ e $\varepsilon_j = 0.5$). Consideremos dois indivíduos 1 e 2 com rendimentos iguais, e imaginemos que se situam os seus rendimentos em $x_1 = x_2 = 1$. Estamos, como já sabemos, numa situação caracterizada por ausência de desigualdade.

Admitamos que ocorre uma transferência infinitesimal de rendimento (dx) entre os dois indivíduos, de tal modo que um indivíduo fica com um rendimento inferior a outro, mas mantendo-se o rendimento total. Como se sabe (pelas conclusões que já atrás obtivemos), isto corresponde a uma situação de desigualdade. Como é possível avaliar essa desigualdade, observando esta Figura? Façamos uma "leitura" gráfica de tais alterações, ainda que com pouco rigor matemático. Consideremos a curva de bem-estar marginal correspondente ao parâmetro $\varepsilon_j = 0.5$. Em resultado desta transferência ocorre: (i) uma diminuição do bem-estar do indivíduo cujo rendimento diminuiu que corresponde à área representada por ABDH; (ii) um aumento do bem-estar do indivíduo cujo rendimento aumentou que corresponde à área HDEG. E o bem-estar social diminuiu pelo valor da diferença entre as duas áreas.

Consideremos agora a curva de bem-estar marginal correspondente ao parâmetro $\varepsilon_j = 2$. Em resultado desta transferência ocorre: (i) uma diminuição do bem-estar do indivíduo cujo rendimento diminuiu que corresponde à área representada por ACDH; (ii) um aumento do bem-estar do indivíduo cujo rendimento aumentou que corresponde à área HDFG. E o bem-estar social diminuiu pelo valor da diferença entre as duas áreas.

Pode observar-se, a partir da Figura 8.4, que a redução do bem-estar foi superior no caso da curva correspondente a $\varepsilon_j = 2$. Como pode interpretar-se este resultado?

Para uma dada alteração da distribuição do rendimento que parta de uma situação de inexistência de desigualdade (distribuição equitativa, ou óptima), o avaliador j considera que tal alteração (passagem a uma situação de desigualdade) origina uma maior perda de bem-estar social se o seu parâmetro ε_j for mais elevado (neste caso, $\varepsilon_j = 2$ comparativamente com $\varepsilon_j = 0.5$). Isto é, quanto maior for o parâmetro ε_j tanto maior é a aversão à desigualdade. Podemos então designar o parâmetro ε_j como o parâmetro de aversão à desigualdade do avaliador *j*.

Vamos agora abandonar a leitura, tal como foi feita, desta Figura e continuar a analisar o problema, agora noutra perspectiva.

Vamos supor que os rendimentos dos indivíduos se encontram ordenados de forma crescente, isto é, $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Associados a estes rendimentos encontramos valores para bem-estar individuais dos indivíduos, avaliados por *j*, igualmente ordenados de forma crescente, isto é:

(8.24) $$W^{(j)}(x_1) < W^{(j)}(x_2) < \cdots < W^{(j)}(x_N)$$

Mas a estes rendimentos encontram-se associados valores para bem-estar marginal decrescentes, isto é:

$$(8.25) \qquad W'^{(j)}(x_1) > W'^{(j)}(x_2) > \dots > W'^{(j)}(x_n)$$

São estes os valores que se encontram representados no gráfico, para diferentes valores do parâmetro ε_j. A cada ponto do gráfico corresponde um valor do bem-estar marginal individual para um dado rendimento, isto é, de quanto varia o bem-estar individual em resultado de uma variação infinitésimal do rendimento. Por outro lado, quanto maior for ε_j, tanto maior é o decréscimo do bem-estar individual marginal para as mesmas variações do rendimento, como se pode ver na Figura.

Façamos agora uma interpretação económica do que acabámos de ver, recordando uma vez mais que se trata de valorizações do bem-estar, e das suas variações, por parte de quem está a avaliar a desigualdade do rendimento, que nós estamos a descrever e analisar. Recordemos a forma aditiva da função de bem-estar social:

$$(8.26) \qquad \begin{aligned} & W^{(j)}\left(X; x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n\right) = \\ & = \sum_{i=1}^{n} W^{(j)}\left(x_i\right) \end{aligned}$$

e admitamos que ocorrem variações infinitesimais dos rendimentos, dx_1, dx_2, ..., dx_n. Podemos exprimir a variação do bem-estar social resultante destas variações do rendimento como:

$$(8.27) \qquad dW^{(j)} = W'^{(j)}\left(x_1\right)dy_1 + W'^{(j)}\left(x_2\right)dy_2 + \cdots + W'^{(j)}\left(x_n\right)dy_n$$

Então, podemos interpretar os termos $W'^{(j)}(x_i)$ como ponderadores de bem-estar, ou seja, ponderadores que a pessoa que está a avaliar o bem-estar social utiliza para determinar a variação do bem-estar social resultante de variações dos rendimentos individuais.

Juntemos agora os resultados obtidos da interpretação do gráfico e a interpretação que demos agora a $W'^{(j)}(x_i)$. O facto de $W'^{(j)}(x_i)$ ser decrescente com x significa que, quem avalia a variação do bem-estar social resultante de variações do rendimento individual, atribui ponderações menores a variações do rendimento que ocorram em níveis de rendimento mais elevados:essas ponderações são tanto menores quanto maiores os rendimentos em que ocorram variações de rendimento.

Quanto maior for o parâmetro ε_j, tanto maior é o decréscimo do bem-estar individual marginal à medida que o rendimento individual aumenta (interpretação do gráfico), e isso significa que tanto mais acentuadamente diminui a ponderação que esta pessoa (que está a avaliar) dá às variações do rendimento à medida que o rendimento individual que sofre essas variações é mais elevado.

Mas o que acabámos de dizer significa que quanto maior for o parâmetro εj, tanto maior é a aversão à desigualdade de quem está a avaliar o bem-estar social (porque, como vimos, menos "peso relativo" está a atribuir ao aumento do bem-estar social resultante de uma dada variação do rendimento de uma pessoa de elevado rendimento comparativamente com o que atribui a uma variação de igual valor que ocorra no rendimento de uma pessoa de baixo rendimento). Podemos então designar o parâmetro εj por *parâmetro de aversão à desigualdade* do avaliador *j*. Trata-se, como parece já óbvio, de uma forma de introduzir juizos de valor (maior ou menor aversão à desigualdade) na avaliação da desigualdade.

E de que modo se reflectem diferentes valores do parâmetro de aversão à desigualdade na medição da desigualdade da distribuição do rendimento?

Retomemos o raciocínio anterior, e imaginemos que ocorre uma transferência de rendimento de um indivíduo de rendimento mais baixo para outra de rendimento mais elevado, aumentando assim a diferença entre os rendimentos desses indivíduos. Para um dado valor da transferência, quanto maior for o parâmetro εj tanto maior é a redução do bem-estar social, uma vez que se pondera mais fortemente a variação negativa do bem-estar (do indivíduo com menor rendimento) e menos fortemente a variação positiva do bem-estar (do indivíduo com maior rendimento).

Repare-se que a um valor superior para o parâmetro de aversão à desigualdade, ε_j, corresponde uma maior concavidade da função de bem-estar individual. Observando de novo a Figura 8.4, vê-se claramente que, para o mesmo rendimento total inicial, a uma função de bem-estar individual mais acentuadamente concâva corresponde um menor valor para o rendimento equivalente igualmente distribuido.

Mas, chegados a este resultado, podemos obter outro, relevante para a medição da desigualdade, que se aconselha que obtenham reflectindo sobre este assunto: quanto *maior* for o parâmetro εj, tanto *menor* o rendimento equivalente igualmente distribuído, isto é, tanto menor o rendimento mínimo que, igualmente repartido pelos indivíduos, origina o mesmo bem-estar que o rendimento inicial, repartido da forma inicial. Mas isto significa que, quanto *maior* for o parâmetro εj, tanto *maior* é a desigualdade da mesma distribuição do rendimento, medida pelo índice de Atkinson, K_A. Ou seja, quanto *maior* a aversão àdesigualdade de quem avalia a desigualdade de uma dada distribuiçãodo rendimento, tanto *maior* a desigualdade dessa distribuição para essa pessoa que a está a avaliar.

Estamos agora em condições de poder medir a desigualdade de uma distribuição do rendimento incorporando, nessa medição, os "nossos" juizos de valor, através da explicitação do parâmetro de aversão à desigualdade εj . Mas, para o fazer, tivemos de explicitar um *conjunto muito grande de hipóteses*.

8.8. O índice de Atkinson

Vamos então agora deduzir a fórmula do índice de Atkinson considerando, para esse efeito, os conceitos utilizados até agora e as hipóteses apresentadas, e tomando como base a forma da função de bem-estar individual indicada anteriormente.

Consideremos então, de novo, um rendimento total *Y* repartido de uma dada forma, de modo que podemos representar a distribuição do rendimento como:

$$\left(\mathrm{X}; \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_n\right)$$

com:

$$\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i = \mathrm{n}.\overline{\mathrm{x}}$$

e designemos esta distribuição do rendimento como a distribuição inicial do rendimento.

Considerando a função de bem-estar individual como:

(8.28) $W^{(j)}(x) = a + \frac{b}{1-\varepsilon_j}.x^{1-\varepsilon_j}$; para $b > 0 \wedge \varepsilon_j > 0 \wedge \varepsilon_j \neq 1$

e, considerando que:

(8.29) $$W^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} W^{(j)}\left(x_i\right)$$

podemos determinar o nível de bem-estar associado, pelo avaliador *j* à distribuição inicial do rendimento como:

(8.30)
$$\begin{aligned} & W^{(j)}\left[;W^{(j)}\left(x_1\right),...,W^{(j)}\left(x_n\right)\right] = \\ & = \sum_{i=1}^{n}\left[a + \frac{b}{1-\varepsilon_j}.x_i^{1-\varepsilon_j}\right] = \\ & = n.a + \frac{b}{1-\varepsilon_j}.\sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\varepsilon_j} \end{aligned}$$

Consideremos agora o rendimento mínimo que, igualmente repartido entre os indivíduos, origina o mesmo bem-estar social que a distribuição inicial para o avaliador *j*. Como sabemos, como resultado das hipóteses introduzidas, designou-se este rendimento mínimo por rendimento equivalente igualmente distribuido, $X_m^{(j)}$.

Temos assim uma distribuição do rendimento:

(8.31) $$\left(X_m^{(j)};x_{m1}^{(j)},...,x_{mn}^{(j)}\right)$$

em que $X_m^{(j)} = n.x_m^{(j)}$, sendo o rendimento igual para todos os indivíduos, por definição, e que vamos designar por $x_m^{(j)}$.

Associado a esta distribuição do rendimento está associado um nível de bem-estar que pode exprimir-se como:

(8.32)
$$W^{(j)}\left[X_m^{(j)};W^{(j)}\left(x_{m1}^{(j)}\right),\cdots,\right]W^{(j)}\left(x_{mN}^{(j)}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{b}{1-\varepsilon_j}x_{mi}^{1-\varepsilon_j}\right]$$
$$=n\cdot a+n\cdot\frac{b}{1-\varepsilon_j}x^{(j)^{1-\varepsilon_j}}$$

uma vez que o rendimento mínimo é igual para todos os indivíduos. Associada a esta distribuição do rendimento está associado o mesmo nível de bem-estar social que o associado à distribuição inicial do rendimento. Podemos então igualar as duas expressões, obtendo-se:

(8.33)
$$n.a+\frac{b}{1-\varepsilon_j}.\sum_{i=1}^{n}x_i^{1-\varepsilon_j}=n.a+n.\frac{b}{1-\varepsilon_j}.x_i^{(j)1-\varepsilon_j}$$

donde vem:

(8.34)
$$x_m^{(j)}=\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i^{1-\varepsilon_j}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_j}}$$

obtendo-se o rendimento equivalente igualmente distribuído como:

(8.35)
$$X_m^{(j)}=n\,.\,x_m^{(j)}$$

Recordando a expressão atrás indicada para o índice de Atkinson:

$$A^{(j)}=1-\frac{X_m^{(j)}}{X}=1-\frac{n.X_m^{(j)}}{n.x}=1-\frac{x_m^{(j)}}{x}$$

vem, finalmente, substituindo os resultados anteriores nesta expressão:

(8.36a)
$$A^{(j)}=1-\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i}{\bar{x}}\right)^{1-\varepsilon_j}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_j}}$$

para $\varepsilon_j>0$ e $\varepsilon_j\neq 1$, notando-se que $x=\left[x^{1-\varepsilon_j}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon_j}}$

Poderiamos provar que, para o valor de $\varepsilon_j = 1$, teriamos:

(8.36b) $$A = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\bar{x}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

E eis que chegámos às formulas do índice de Atkinson. Não se tratando de fórmulas muito "complicadas", repare-se como, subjacente a elas, se encontram *tantas hipóteses que tivemos de formular* até chegarmos a este resultado!

Podem fazer-se os seguintes comentários finais, observando a fórmula a que chegámos, e relacionar estes comentários com o que ficou dito atràs. Para $\varepsilon_j = 0$, vem A = 0 para qualquer distribuição do rendimento, numa situação em que não há qualquer aversão à desigualdade. Quando $\varepsilon_j \rightarrow \infty$ só há dois valores possíveis para o índice de desigualdade de Atkinson: i) 0, correspondente a uma distribuição do rendimento em que todos os indivíduos auferem o mesmo rendimento; ii) 1, quando haja duas pessoas com rendimento diferente. Para uma dada distribuição do rendimento, o índice A aumenta com o valor de ε_j, o que justifica a interpretação económica dada a este parâmetro. Veja-se, finalmente, que este índice é independente da escala do rendimento, isto é, se multiplicarmos ou dividirmos todos os rendimentos pela mesma constante positiva, o índice A mantém-se invariante.

Podemos agora retomar o problema tratado no capítulo anterior e que ficou sem solução: como evoluiu a desigualdade do rendimento familiar em Portugal entre 1995 e 2000? Como estamos recordados, o problema colocava-se porque as curvas de Lorenz das distribuições de rendimento se intersectavam, apesar de os valores do indice de Gini pouco diferirem nesses dois anos.

Vejamos como a utilização do indice de Atkinson nos vai permitir ordenar as duas distribuiçõs do rendimento. Vejamos o Quadro 8.1.

Quadro 8.1

Evolução da desigualdade do rendimento em Portugal

	1989	1995	2000
Gini	0,3169	0,3473	0,3481
Atkinson, ε = 0,5	0,0818	0,0979	0,0981
Atkinson, ε = 1,0	0,1545	0,1810	0,1814
Atkinson, ε = 2,0	0,2886	0,3205	0,3140

Fonte: Rodrigues, 2002

Tenhamos presentes as hipóteses em qu assenta o indice de Atkinson. Verificamos que quaisquer que sejam os valores do parâmetro de aversão à desigualdade, este índice ordena de igual modo as distribuições do rendimento para os três anos considerados na análise. E é a mesma ordenação que o indice de Gini faz para essas distribuições. Mas já o mesmo não sucede com as dsitribuições do rendimento de 1995 e 2000. Para valores "baixos" de aversão a desigualdade, o índice de Atkinson ordena estas duas distribuições do mesmo mdo que o indice de Gini: a desigualdade aumenta entre 1995 e 2000. Mas quando o parâmetro de aversão à desigualdade é "elevado" (estamos a admitir ε = 2,0), a ordenação inverte-se: a desigualdade do rendimento diminui entre 1995 e 2000.

O que acabámos de ver pode ser interpretado com base no que foi dito na secção 8.7 a propósito da interpertação de ε como parâmetro de aversão à desigualdade. Significa que esamos a ponderar relativamente mais, em termos de bem-estar, as variações de rendimento que ocorrem nos rendimentos mais baixos. Então, se ponderarmos relativamente mais os rendimentos mais baixos, a desigualdade do rendimento diminui entre 1995 e 2000. Repare-se no traçado das curvas de Lorenz para estes dois anos, que fizémos no capítulo anterior. Na verdade, as duas curvas intersectam-se num valor relativamente baixo do rendimento estando a Curva de Lorenz de 2000 mais próxima do que a de 1995 da recta de igual distribuição. Assim, temos solução para o problema de saber qual das duas distribuições tem maior desigualdade. A resposta é: depende de quem avalia, e dos juizos de valor desse avaliador. Quem tiver grande aversão à desigualdade, a desigualdade diminuiu; se tiver um baixa aversão à desigualdade, desigualdade aumentou.

Leituras complementares

Este capítulo foi escrito tendo em vista uma explicaçãom cuidadosa de um assunto que, na literatura económica se apreenta de forma mais sintética e mais formalizada. Em outros textos, esta fundamentação não é explicada, o que deixa uma noção menos clara sobre o conjunto de hipóteses que estão subjacentes à medição da desigualdade, arriscando-se a dar a entender uma natureza mecânca, não normativa, na sua redução simples a uma mera fórmula matemática simples de cálculo. Queremos que tal não aconteça, por isso escrevemos este capítulo.

Para quem pretender conhecer genericamente formulas de cálculo de medidas de desigualdade e suas aplicações, aconselha-se que leia, de novo, mas orientado para esta matéria:

Connolly, S., A. Munro (1999) *Economics of the Public Sector*. Prentice Hall. Capítulo 14 ("*Income Inequality"*), pp. 245-269.

O que se espera da leitura deste capítulo

1. Que os leitores comprendam a que significa "medir a desigualdade de uma distribuição de rendimento", de como se relaciona com a noção de bem-estar, apercebendo-se das hipóteses que devem ser formuladas para fazer essa medição;

2. Que os leitores fiquem a conhecer o índice de Atkinson e a natureza normativa dessa medição, expressa no conceito de "coeficiente de aversão à desigualdade".

Palavras-chave

Ao longo do capítulo foram utilizados vários conceitos que formam um glossário que vai sendo enriquecido ao longo do livro. Sugere-se e recomenda-se que os leitores redijam pequenos textos de definição de alguns dos conceitos abaixo descritos e que constituem as palavras-chave que ajudam a identificar o conteúdo deste capítulo.

coeficiente de desigualdade
aversão à desigualdade

indice de Atkinson

Questões para revisão e reflexão

1. Sendo a desigualdade da distribuição do rendimento uma situação em que, para essa distribuição, o bem-estar não é o máximo, e não havendo uma unidade de medida para o bem-estar, como é que é possível medir, com espressão numérica, a desigualdade da distribuição do rendimento?

2. Acha que o indice de Gini, pelo facto de não ser deduzido a partir de uma formulação de bem-estar social mas, antes, a partir da Curva de Lorenz, é uma medida de concentração de rendimento e nunca uma medida de desigualdade, porque não tem valor normativo?

Anexo

Medição da desigualdade

Medir a desigualdade de *uma* distribuição de um dado valor total do rendimento: associar, a *essa* distribuição do rendimento, uma informação escalar valorativa da diferença entre o bem-estar social *dessa* distribuição do rendimento e o bem-estar social *máximo* alcançável com esse rendimento total;

Mede-se a desigualdade através de uma *medida de desigualdade*, ou *coeficiente de desigualdade*, da distribuição do rendimento

Seja uma dada população (admitamos que é infinita) em relação à qual observamos uma cada característica: o rendimento auferido por cada um dos elementos da população, X. Seja X uma variável aleatória (admitamos que é contínua) com fdp f(x).

I(X) é um coeficiente de desigualdade se for:

(A8.1) $$I(X)=\int_0^\infty H\left[x,f(x)\right]f(x)\,dx$$

i.e., o valor esperado de uma função $H\left[x,f(x)\right]$, com algumas propriedades consideradas desejáveis: trata-se de uma função de avaliação que capta, da distribuição do rendimento, os aspectos considerados relevantes para essa medição (as suas propriedades reflectem os juizos de valor do avaliador da desigualdade).

Para várias medidas de desigualdade a função de avaliação é $H(x,\mu)$, isto é, a função H(.) é uma função da distribuição do rendimento através do parâmetro μ; para outras medidas de desigualdade é a própria f.d.p. que entra como argumento da função H(.) (veremos adiante que isto acontece com o indice de Gini)

Para as medidas de desigualdade em que temos $H(x,\mu)$, as *propriedades* desta função são:

- $H(x,\mu)$ é contínua e duplamente diferenciável
- $\int |H(x,\mu)| < \infty$ (convergência na integração)
- $H(x,\mu)=0$ se f(x) = 1 para $x=\mu$ e f(x) = 0 para $\forall x \neq \mu$ (condição de normalização)
- $H'(x,\mu) > H'(x-h,\mu)$ para $h>0$ ou, o que é equivalente, $H''(x,\mu)>0$ (estrita convexidade de H(.) relativamente a x)

Algumas medidas de desigualdade conhecidas da estatística:

desvio médio relativamente à média, com $H(x,\mu)=|x-\mu|$

variância, com $H(x,\mu)=(x-\mu)^2$

índice de Gini

Pode ser definido de diferentes formas alternativas para uma população infinita, com X (= rendimento) uma varável aleatória contínua

Índice de Gini como medida de concentração do rendimento associada à curva de Lorenz; podem entender-se com facilidade as expressões abaixo se relacionarem com a curva de Lorenz

(A8.2a) $$G=\frac{2}{\mu}\int_0^{\infty} x\left[F(x)-\frac{1}{2}\right]f(x)\,dx$$

(A8.2b) $$G=1-2\int_0^{\infty} F_1(x)\,f(x)\,dx$$

(A8.2c) $$G=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\left[x\,F(x)-\mu F_1(x)\right]f(x)\,dx$$

No caso de estarmos a analisar a distribuição do rendimento de uma população finita, ou de uma amostra da população, em que a distribuição do rendimento é representada pelo vector:

$$(x_1^{'},...,x_i^{'},...,x_n^{'}) \text{, com } x_1^{'} \leq x_2^{'} \leq ... \leq x_i^{'} \leq ... x_n^{'}$$

teremos a seguinte expressão para o índice de Gini

(A8.3) $$G = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2 \bar{x}} \sum_{i=1}^{n} (n-i+1).x_i^{'}$$

Demonstra-se que o índice de Gini é mais sensível à variação dos rendimentos que ocorram perto dos valores médios da distribuição

Medida de entropia da distribuição do rendimento (Theil)

(A8.4) $$\frac{1}{\beta(\beta+1)} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{x}{\mu} \right)^{\beta+1} - 1 \right] f(x) dx$$

casos particulares:

(A8.5a) $$\beta \to 0 \quad T = \int_0^{\infty} \frac{x}{\mu} \ln\left(\frac{x}{\mu}\right) f(x) dx$$

(A8.5b) $$\beta \to -1 \quad L = \int_0^{\infty} \ln\left(\frac{\mu}{x}\right) f(x) dx$$

no caso de se tratar de uma população finita, ou de uma amostra da população, de dimensão n, temos:

(A8.6a) $$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\bar{x}} \ln \frac{x_i}{\bar{x}}$$

(A8.6b) $$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{\bar{x}}{x_i}$$

Índice de Atkinson

É uma medida que permite vários graus de sensibilidade a alterações do rendimento que ocorram entre os rendimentos mais baixos, através do *parâmetro de aversão à desigualdade*, ε:

(A8.7) $$A_\varepsilon = 1 - \left[\int_0^\infty \left(\frac{x}{\mu} \right)^{1-\varepsilon} f(x)\,dx \right]^{1/1-\varepsilon}, \ \varepsilon > 0$$

que, no caso de a população ser finita ou se tratar de uma amostra de dimensão n, se tem:

(A8.8a) $$1 - \frac{1}{\bar{x}} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\varepsilon} \right]^{1/1-\varepsilon}, \ \varepsilon \neq 1, > 0$$

(A8.8b) $$1 - \exp\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{\bar{x}} \right) \right], \ \varepsilon = 1$$

Com valor de ε mais elevado, a função de utilidade tem uma maior concavidade; isto significa que uma mesma variação do rendimento que ocorra entre os rendimentos mais baixos repercute-se numa variação do bem-estar social supeior à que ocorra entre os rendimentos mais elevados e, para um valor de ε mais elevado, essa diferença é mais acentuada.